תורת הקבוצות, תרגיל 3

1. תהי A קבוצת כל סדרות קושי של מספרים רציונליים. (תזכורת: סדרת קושי היא סדרה $\{a_n\}$ עבורה לכל $\epsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים $|a_n - a_m| < \epsilon$). נגדיר על $A \times A$ יחס R בצורה הבאה: לכל $\{a_n\}, \{b_n\} \in A$ מתקיים $\{a_n\}R\{b_n\}$ אם ורק אם $lim(a_n - b_n) = 0$.
א. הוכח, כי R הינו יחס שקילות.
ב. אפיין את קבוצת מחלקות השקילות של R. (לשם כך מצא את המשותף לכל הסדרות במחלקת שקילות ושאינו משותף להן עם אף סדרה שאינה במחלקת השקילות.)

2. תהי A קבוצה ותהי $f : A \to A$ פונקציה בעלת התכונה הבאה: לכל $x \in A$ קיים $n \in N$ כך, ש- $f^n(x) = x$.
הוכח, כי f הינה חח"ע.
(תזכורת: $f^n(a)$ פירושו הפעלת הפונקציה n פעמים. למשל, $f^2(a) = f(f(a))$.)

3. תהי $(A, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נתבונן בקבוצה $P(A)$ הסדורה ע"י הכלה, כלומר, $(P(A), \subseteq)$. הוכח, כי קיימת פונקציה $f : A \to P(A)$ שהיא שומרת סדר עובר יחסי הסדר שהגדרנו.

4. תהיינה A, B קבוצות סדורות חלקית ונניח שקיימת $f : A \to B$ שומרת סדר וכן נניח שהפונקציה ההפוכה $f^{-1} : B \to A$ גם היא שומרת סדר. הוכח, כי אם ל- A קיים איבר מינימלי אז גם ל- B קיים איבר מינימלי.
(ב"איבר מינימלי בקבוצה" הכוונה כאן היא לאיבר שהוא $\leq$ מכל איבר של הקבוצה.)

5. הוכח, כי קבוצה סדורה $(A, \leq)$ הינה סדורה היטב אם ורק אם לכל רישא ממש שלה B יש ב-A איבר b שהוא האיבר המזערי הגדול מכל איברי B.

6. [רשות] א. תהי A קבוצת כל הסדרות הסופיות של המספרים 0 ו-1. נסדר אותה כך. עבר $a, b \in A$ קיים $a < b$ אסם b היא המשכה של a או אם קיים k בתחום שתי הסדרות כך ש- $a_k \neq b_k$ ועבור ה-k המזערי המקיים זאת קיים $a_k = 0$ ו- $b_k = 1$. הוכח, כי הקבוצה A, בסדר זה, אינה סדורה היטב.
ב. [רשות] הגדר יחס סדר חדש על קבוצת המספרים הרציונליים כך שעם יחס הסדר החדש הקבוצה תהיה סדורה היטב.

תאריך ההגשה: 16.3.2005